

ANEXO 1 → Ondas eletromagnéticas: tratamento diferencial

Na forma diferencial as equações de Maxwell são escritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Onde $\vec{J}$ é denominado densidade de corrente.

No vácuo $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$. Assim, as equações tornam-se:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (1) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (2)\end{aligned}$$

Para continuarmos a discussão vamos precisar da forma de uma equação de onda e de uma propriedade do rotacional.

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \Rightarrow \text{forma geral de uma equação de onda, onde } \nabla^2 \text{ é o Laplaciano}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \Rightarrow \text{rotacional do rotacional de uma grandeza genérica vetorial } \vec{A}. \quad (3)$$

Substituindo $\vec{A}$ por $\vec{E}$:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

Observando as equações de Maxwell no vácuo sabemos os valores de

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \text{ e } \vec{\nabla} \cdot \vec{E}. \text{ Portanto}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \nabla^2 \vec{E}$$

Usando (2)

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4)$$

A equação (4) é uma equação de onda, cuja velocidade de propagação substituindo os valores de μ_0 e ϵ_0 vale c !

Assim, concluímos que a luz é uma onda eletromagnética!

Este é o ponto da teoria de Maxwell que unifica ótica e eletromagnetismo.