Espalhamento Compton[i]

Além do efeito fotoelétrico, outra evidência da adequação do conceito de fóton foi proporcionada por Arthur H. Compton[ii], que observou e interpretou o espalhamento de raios X por elétrons livres. Compton apontou que se essa interação for descrita como um processo de espalhamento, envolvendo a colisão entre um fóton e um elétron, o elétron deverá recuar e absorver parte da energia. O fóton espalhado deverá então ter menor energia e, portanto, frequência mais baixa que a do fóton incidente. Esse resultado difere da física clássica, segundo a qual uma onda eletromagnética de frequência f incidente sobre um material, produz oscilação das cargas presentes no material com a mesma frequência, e uma re-irradiação de ondas eletromagnéticas com a mesma frequência.

Para testar sua hipótese, Compton fez um feixe de raios X monocromáticos (comprimento de onda λ) colimados incidir em um bloco de carbono. Mediu os raios X emergentes do bloco em função do comprimento de onda em vários ângulos diferentes. A Fig. 38-3 mostra a geometria e um esquema do arranjo experimental usado por Compton, enquanto a Fig. 38-5 mostra um esquema dos ângulos de espalhamento do fóton (ϕ) e do elétron (θ).

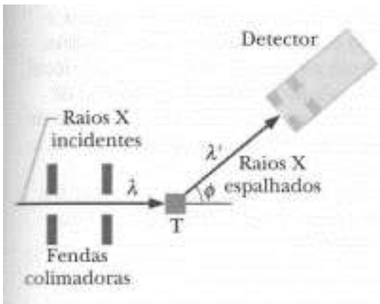

Fig. 38-3 Montagem usada para estudar o efeito Compton. Um feixe de raios X de comprimento de onda $\lambda = 71{,}1$ pm incide em um alvo de carbono T. Os raios X espalhados pelo alvo são observados em vários ângulos ϕ com a direção do feixe incidente. O detector mede tanto a intensidade como o comprimento de onda dos raios X espalhados.

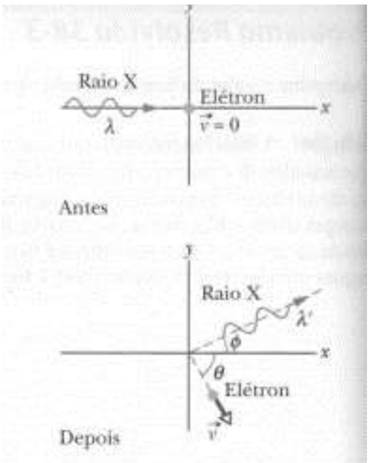

Fig. 38-5 Interação entre um fóton de raios X de comprimento de onda λ e um elétron inicialmente estacionário. Após a interação, o fóton deixa o local da colisão com um comprimento de onda maior, λ', e uma nova direção de propagação, definida pelo ângulo ϕ; o elétron passa a se mover com velocidade v em uma direção que faz um ângulo θ com a direção do fóton incidente.

Aplicando a conservação de energia e a conservação de momento linear no âmbito da teoria da relatividade restrita a uma colisão elástica entre um fóton e um elétron, Compton chegou ao resultado[iii] :

$$\boxed{\underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{h}{m_e c}\,(1 - \cos\phi)}_{equação\ do\ espalhamento\ Compton}} \qquad \text{(Eq. A)}$$

A grandeza $h/m_e c$ só depende da massa do centro espalhador, nesse caso o elétron, e das constantes h e c. Tem dimensões de comprimento e é conhecida como comprimento de onda de Compton. Seu valor é:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = \frac{hc}{m_e c^2} = \frac{1240\ eV.nm}{5{,}11 \times 10^5\ eV} = 2{,}43 \times 10^{-3}\ nm = 2{,}43\ pm$$

Em virtude do deslocamento λ_2 - λ_1 ser pequeno, é difícil observar, a menos que λ_1 seja tão pequeno que a variação relativa $(\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1$ seja apreciável. Para isso Compton realizou experiências (Fig. 38-4) com comprimento de onda 71,1 pm, E = 17,4 keV.

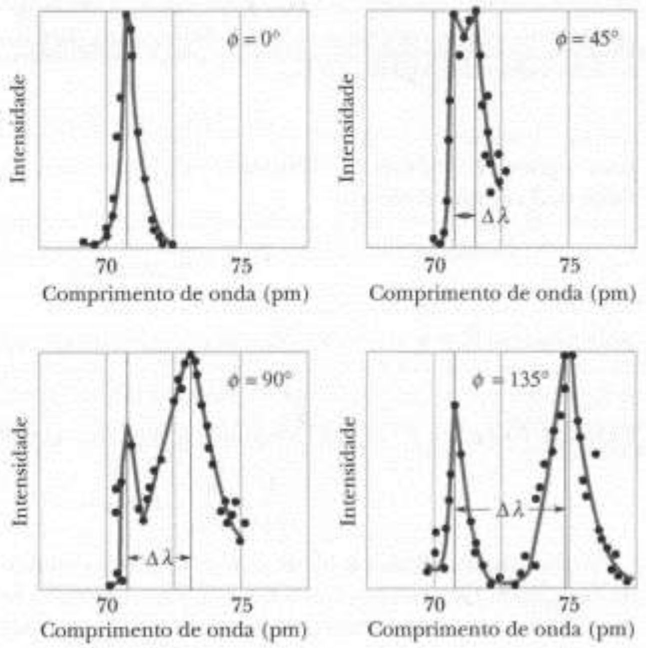

Fig. 38-4 Resultados obtidos por Compton para quatro valores do ângulo de espalhamento ϕ. Observe que o deslocamento de Compton $\Delta\lambda$ aumenta com o ângulo de espalhamento.

Uma vez que a energia do fóton utilizada é muito maior que a energia de ligação dos elétrons de valência dos átomos de carbono (que é da ordem de alguns elétrons-volt), esses elétrons podem ser considerados livres nas condições do experimento realizado. Os resultados experimentais da medida de λ_2 - λ_1 conseguidos por Compton (Fig.38-4) em função do ângulo de espalhamento ϕ, concordam com a Eq.A, o que confirma a adequação do conceito de fóton. Isso explica o pico em torno do comprimento de onda λ_2. Mas e o outro pico que aparece no experimento, relacionado ao comprimento de onda λ_1 [iv]?

O fato de que existe um deslocamento no comprimento de onda dos fótons espalhados, e que esse é previsto pela equação deduzida por Compton (Eq.A) mostra de maneira inequívoca que a física clássica falha na interpretação do experimento e que o conceito de fóton funciona adequadamente.

Exercício/Exemplo:[v]

A partir da conservação da energia e conservação do momento na formulação relativista, deduza a expressão do deslocamento de comprimentos de onda Compton. Sugestão: elimine o termo de momento do elétron das equações e conservação.

Observações auxiliares:

Antes de resolver o problema propriamente dito, vamos revisar alguns conceitos relacionados com energia e momento no âmbito da teoria da relatividade restrita.

(a) A expressão relativística que relaciona energia e momento linear de uma partícula é:

$$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2 \tag{Eq.B}$$

Essa expressão será utilizada para calcular a relação entre energia e momento linear do elétron espalhado. Sendo nula a massa de repouso do fóton, sua energia é dada por[vi]

$$E_{fóton}^2 = p^2c^2 \tag{Eq.C}$$

(b) Sejam p_1 e p_2 os momentos lineares dos fótons incidente e espalhado, respectivamente, e p_e o momento linear do elétron após o espalhamento. A conservação do momento linear na colisão de um fóton com um elétron resulta em:

$$\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} + \overrightarrow{p_e}$$

$$\overrightarrow{p_e} = \overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2}$$

Tomando o produto escalar dos membros da esquerda e da direita por si mesmos, obtemos:

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2\overrightarrow{p_1}.\overrightarrow{p_2}$$

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_1\cos\phi \tag{Eq.D}$$

(c) A expressão, devida a Einstein (1916), que relaciona o momento linear do fóton com seu comprimento de onda é:

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{Eq.E}$$

Solução:

Partido da equação da conservação da energia relativista na colisão (Tipler, Eq. 3.11), temos:

$$\overbrace{\overbrace{p_1c}^{\text{energia do fóton incidente}} + \overbrace{m_ec^2}^{\text{energia de repouso do elétron}}}^{\text{antes da colisão}} = \overbrace{\overbrace{p_2c}^{\text{energia do fóton espalhado}} + \overbrace{\sqrt{(m_2c^2)^2 + p_e^2c^2}}^{\text{energia do elétron}}}^{\text{depois da colisão}}$$

Desenvolvendo:

$$[p_1c + m_ec^2 - p_2c]^2 = (m_2c^2)^2 + p_e^2c^2$$

$$p_e^2 = \frac{1}{c^2}\{[(p_1 - p_2)c + m_ec^2]^2 - (m_ec^2)^2\}$$

$$p_e^2 = (p_1 - p_2)^2 + 2(p_1 - p_2)m_ec$$

$$\boxed{p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 + 2(p_1 - p_2)m_ec} \tag{Eq.F}$$

Usando agora a conservação do momento na formulação relativista (Tipler, Eq. 35.10):

$$\boxed{p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\phi} \tag{Eq.G}$$

Eliminando p_e usando Eq.1 e Eq.2:

$$p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 + 2(p_1 - p_2)m_e c \;=\; p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\phi$$
$$2(p_1 - p_2)m_e c \;=\; 2p_1p_2(1 - \cos\phi)$$
$$\frac{(p_1 - p_2)}{p_1p_2}m_e c \;=\; (1 - \cos\phi)$$
$$\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)m_e c \;=\; (1 - \cos\phi)$$

Usando as relações propostas por de Broglie para o momento linear do fóton (Eq.E):

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_1} \qquad p_2 = \frac{h}{\lambda_2}$$
$$(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{m_e c}{h} = \; (1 - \cos\phi)$$
$$\boxed{\underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{h}{m_e c}\,(1 - \cos\phi)}_{equação\ do\ espalhamento\ Compton}} \qquad \text{(Eq.H=Eq.A)}$$

Onde θ é o ângulo de espalhamento do fóton, medido em relação à direção de incidência. Pode-se observar que a variação do comprimento de onda não depende do comprimento de onda original.

---

[i] Adaptado de Halliday-Resnik-Walker, Fundamentos da Física, Cap. 38, Vol. 4, e P. Tipler, Física, Cap. 35, Vol.4, para a disciplina Física IV, ano de 2015.

[ii] O experimento foi realizado por Compton em 1923 na Universidade de Washington, em Saint Louis, Missouri, meio oeste dos Estados Unidos.

[iii] A dedução dessa expressão a partir de princípios básicos da física é feita no Exercício-Exemplo resolvido na sequência.

[iv] O pico praticamente idêntico ao comprimento de onda incidente está associado aos elétrons internos, fortemente ligados ao núcleo do átomo de carbono. Nesse caso tudo se passa como se a colisão fosse entre o fóton e o núcleo do átomo, que tem massa milhares de vezes maior diminuindo drasticamente o fator h/mc, portanto, o deslocamento Compton é praticamente zero, resultado no pico do fóton espalhado com praticamente o mesmo comprimento de onda que o fóton incidente.

[v] Esta dedução utiliza as equações do momento e energia no contexto da relatividade restrita, as quais foram mencionadas no item observações auxiliares do exercício resolvido.

[vi] Observe que essa expressão também funciona na eletrodinâmica clássica em que p = U/c, sendo U a energia da onda que transporta o momento linear p.